*物理のためのリー群の基礎

東北大学理学研究科　森達哉　堀口朋裕

概要
素粒子物理学で用いられるSU(N)群についてリー群・リー代数をヤング図を用いて説明する。ここではSU(3)について考える

1.目的

量子力学においてスピン1/2の合成はスピン3重項、1重項に分けることができる。

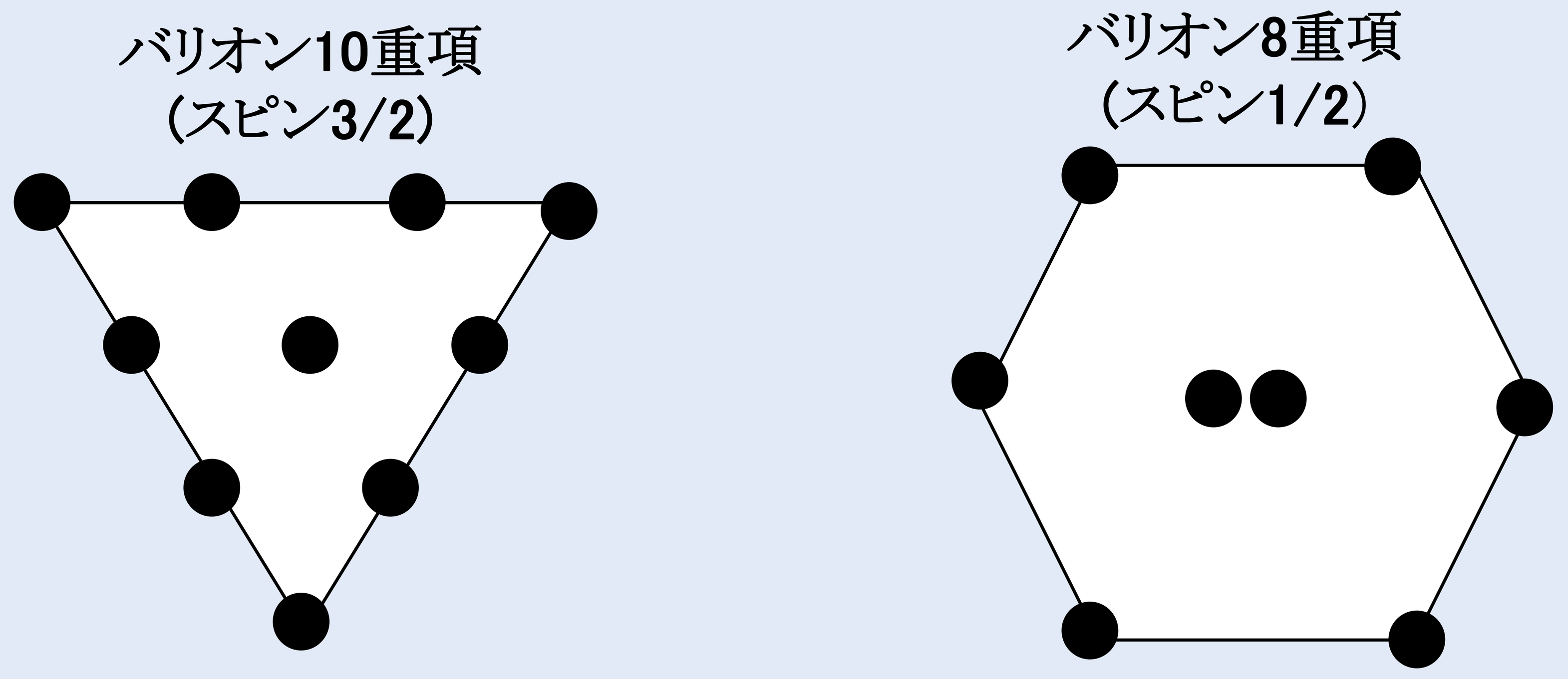
スピン1/2 × スピン1/2 = スピン1 + スピン0

このことをリー群の言葉ではSU(2)群における2表現の直積と呼ぶ。またこのように直積表現を既約表現の直和で表すことを既約分解という。既約とは適当な同値変換によってその集合を2つ以上の集合の直和にすることができない性質のことを言う。既約分解は合成された物理系の状態から、その状態の構成要素を予測する一つの道具になる。

例)クォークモデルが確立していない時代に、多数見つかっていたバリオンをスピンの値で分類することによって現代で言うところのバリオン10重項、8重項となるような図形ができあがった。これは

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

の既約分解の式を連想させ、仮想的な構成要素、u,d,sクォークを仮定する要因のひとつになった。



この例に限らず一般的な既約分解を考える。

2.SU(3)のテンソル記述法

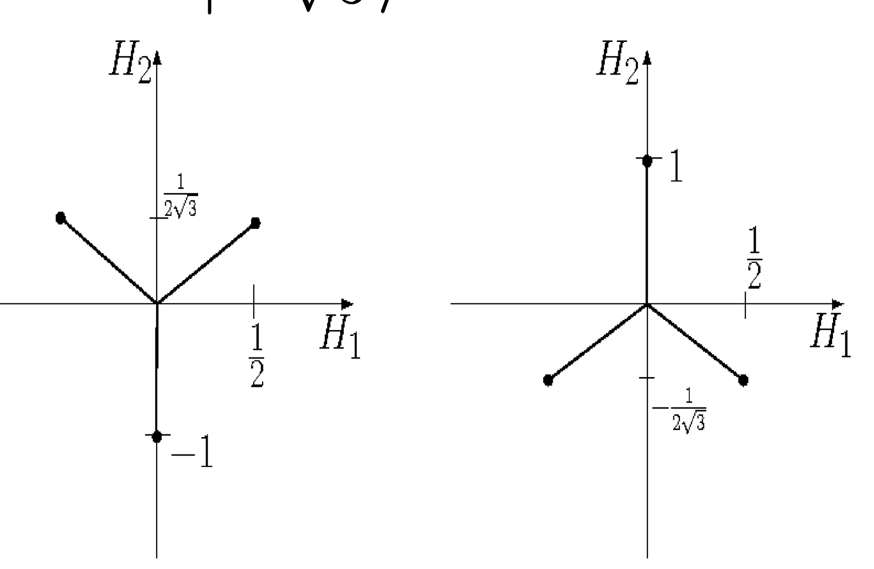
・3表現の基底ケットを次のようにラベルする。

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle \equiv |_1\rangle, \left|\frac{-1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle \equiv |_2\rangle, \left|0,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right\rangle \equiv |_3\rangle \qquad (1)$$

・3*表現の基底ケットを次のようにラベルする。

$$\left|\frac{-1}{2},\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right\rangle \equiv |^1\rangle, \left|\frac{1}{2},\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right\rangle \equiv |^2\rangle, \left|0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle \equiv |^3\rangle \qquad (2)$$

・ウエイト図
量子力学においてZ方向のスピン演算子S_zの固有値は±1/2だが群論の言葉ではこれをウエイトと呼ぶ。
左が(1)右が(2)式 。Hは状態を表す固有値(2成分)



・m個の3表現と、n個の3*表現の直積の状態は次のように表す。

$$|^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} >= |^{i_1} > \dots |^{i_n} > |_{j_1} > \dots |_{j_m} > \qquad (3)$$

・テンソル積空間上の任意のテンソルvは

$$|v >= |^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} > v^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_n} \qquad v^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_n} = <^{i_1 \dots i_n}_{j_1 \dots j_m} |v > \qquad (4)$$

3.既約分解の理論

テンソルを使って直積を以下のように分解する

・3 ⊗ 3　:2つの3表現をu^i、v^jとして、その積を次のように変形

$$u^i v^j = \underbrace{\frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i)}_{i,j\ \text{について対称}} + \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm}u^l v^m}_{i,j\ \text{について反対称}}, \quad 3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^* \qquad (5)$$

・3 ⊗ 3*　:3表現をu^i、3*表現をv_jとして、その積を次のように変形

$$u^i v_j = \underbrace{(u^i v_j - \frac{1}{3}\delta^i_j u^k v_k)}_{\text{トレースゼロ}} + \underbrace{\frac{1}{3}\delta^i_j u^k v_k}_{\text{定数係数付の}\delta^i_j} \qquad 3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \qquad (6)$$

このように分けると、それぞれが不変表現空間になり、その直和で表せるようになる。

4. ヤング図を用いた既約分解の準備

高次元になっていくと既約な表現を作るのが大変…

・ 3 ⊗ 8の既約分解

$$u^i v^j_k = \frac{1}{2}(u^i v^j_k + u^j v^i_k - \frac{1}{4}\delta^i_k u^l v^j_l - \frac{1}{4}\delta^j_k u^l v^i_l) + \frac{1}{4}\epsilon^{ijl}(\epsilon_{lmn}u^m v^n_k + \epsilon_{kmn}u^m v^n_l) + \frac{1}{8}(3\delta^i_k u^l v^j_l - \delta^j_k u^l v^i_l) \qquad (7)$$

$$3 \otimes 8 = 15 \oplus 6^* \oplus 3$$

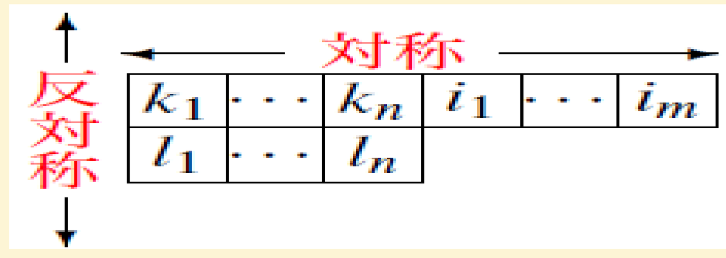
⇒ヤング図を用いると機械的に既約分解できる！

<ヤング図を用いるための準備>

任意のテンソル$A^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_n}$を、εテンソルを用いて下付添え字をすべて上にする。

$$a^{i_1 \cdots i_m k_1 l_1 \cdots k_n l_n} = \varepsilon^{j_1 k_1 l_1} \dots \varepsilon^{j_n k_n l_n} A^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_n} \qquad (8)$$

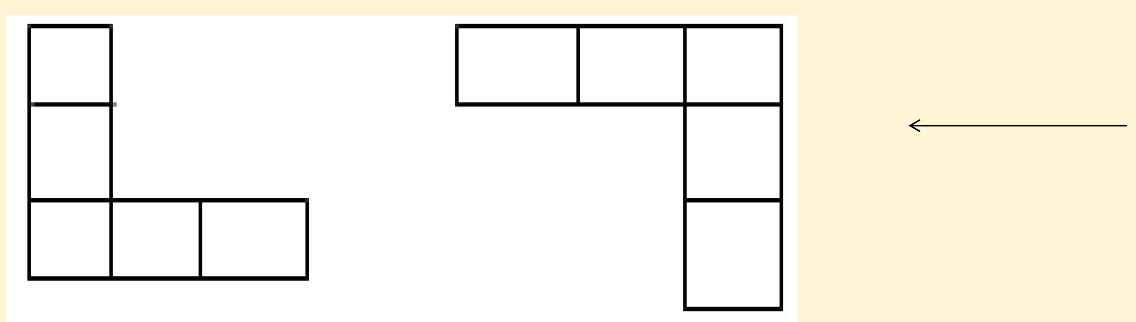
添え字の各対k_i, l_iに関して反対称で、kl対またはkとlのセットの変換$k_i l_i \leftrightarrow k_j l_j$に関して対称であり、(8)は次のように対応させる。

(8) ↔  (9)

<ヤング図を用いた既約分解のルール>

既約表現α とβ の直積を分解する場合を考える。α とβ をヤング図に対応させ(以後ヤング図A,Bとする)以下の手順でAの上にBの箱を足していく。

①図形Bの1行目のすべての箱にaを書き、2行目のすべての箱にbを書く。
②Bの1行目から箱を取りそれらをAの右側か下側へ2つのaが同じ列に来ないよう、かつ正当な図形になるようにくっつける。
<正当な図形でない例>



ヤング図は左上詰めで描かなければならない

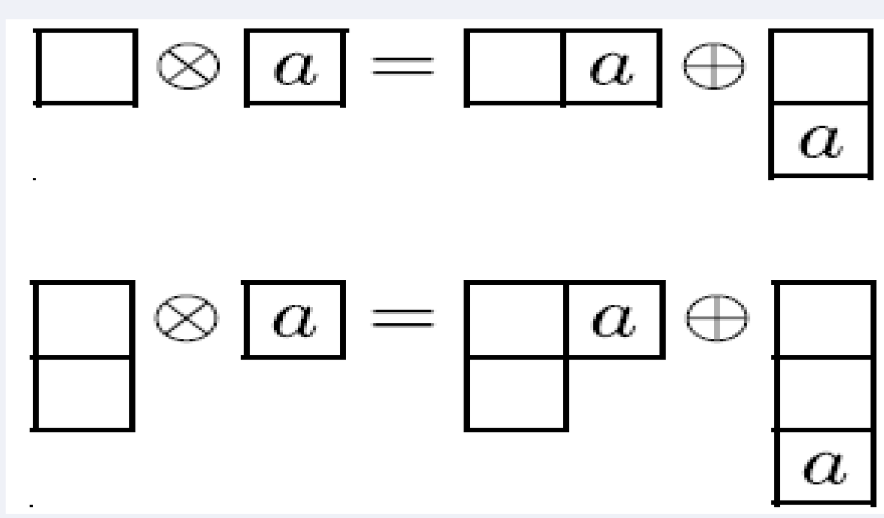
③2行目の箱を取り、上でできた図形のそれぞれに対し、2つのbが同じ列に来ないよう、正当な図形になるようにくっつける。
④出来上がった図形を各行に沿って右から左へ、上の行から下の行へ読んでいくとき、どの時点でもaの個数はbの個数以上でなければならない。

5.ヤング図による既約分解の例

上記のルールを用いて以下のように記述できる

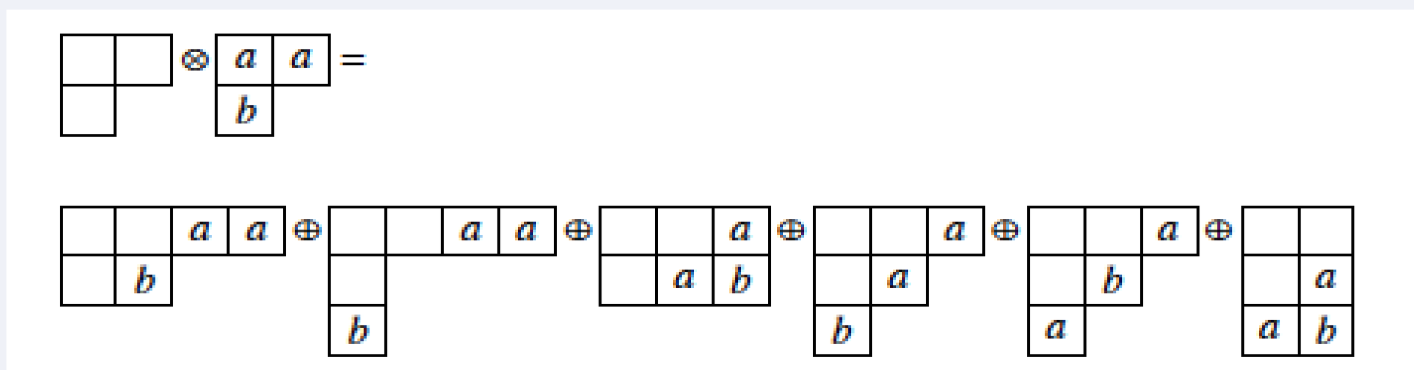
$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$ (10)

$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$ (11)

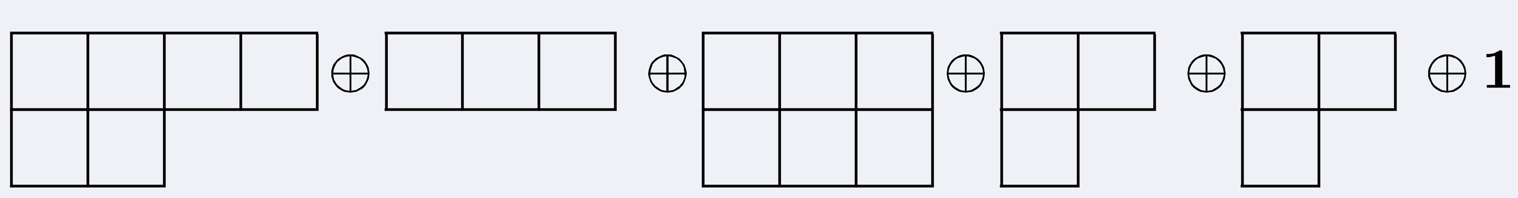


すべてのルールを用いる必要がある8 ⊗ 8の既約分解を例に挙げる。

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$



・縦に3段あるものは省略してもよい



27 ⊕ 10 ⊕ 10* ⊕ 8 ⊕ 8 ⊕ 1

なお対応するヤング図の次元数は“factors over hooks則”で計算することができる。

6.まとめ

以上がヤング図を用いた既約分解の方法である。上記はSU(3)についての既約分解だが一般のSU(N)もヤング図を用いて既約分解をすることができる。