B physics seminar

Hironori Katsurayama

目次

1. Maximum likelihood について
2. Least squares について
3. Observation of Mixing-induced CP Violation in the Neutral B Meson system におけるMaximum likelihood

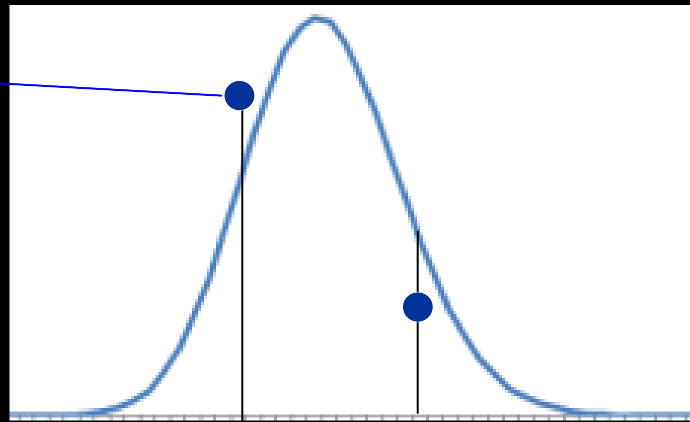
Maximum likelihood と Least squares

Maximum likelihood と Least squares

確率密度関数を

$$f(x;\theta)$$

x: ある事象における測定値
θ : その事象の推定値(変数)



Likelihood function は

$$L(\theta) = f(x;\theta)$$

と表す。
ここで、Lはθが真の値(θ_0)のとき最大となる.

Maximum likelihoodとは、Lが最大となるθ (θ=θ_0)を測定値を元に求める手法である。

Maximum likelihood

Xiがそれぞれ独立で、全てがf に従う場合likelihood functionは

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i; \boldsymbol{\theta})$$

x　:測定値
θ　:推測値

Maximum Likelihood では…L(θ) が最大となるような θ を求める

一般的には以下を解くことで θ は得られる。

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0\ , \qquad i = 1, \ldots, n\ .$$

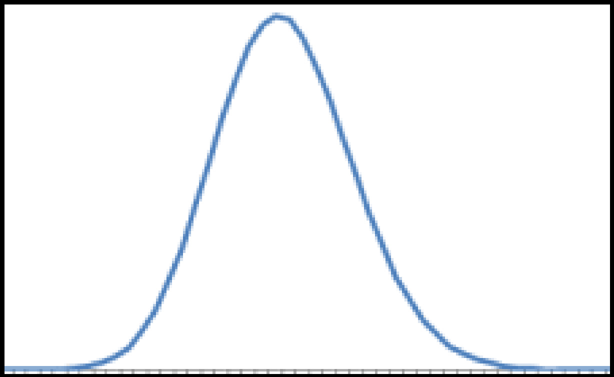
Least squares

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = -2\ln L(\boldsymbol{\theta}) + \text{ constant } = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - F(x_i;\boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_i^2} .$$

L(θ) が最大、すなわちχ^2(θ)が
最小となるθ(θの真の値)を求める。

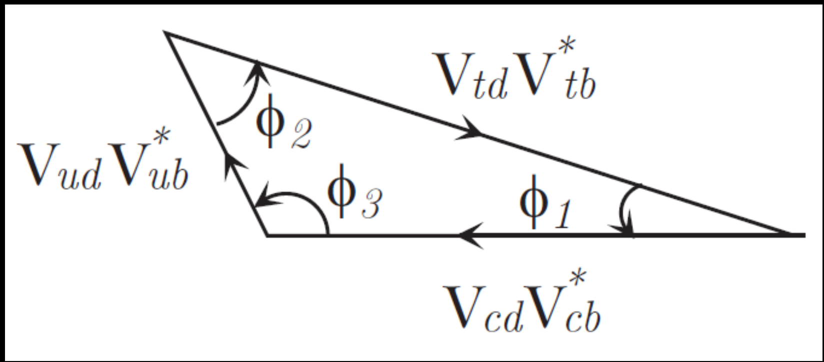
Least squares はある特定の条件のときに、
Maximum likelihood と一致

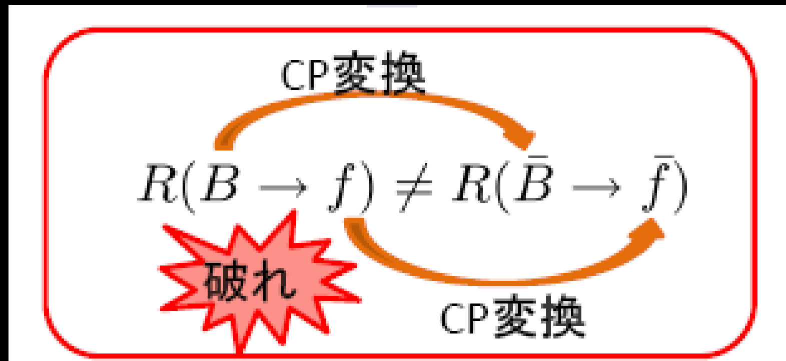
特定の条件とは、上記式において…
F : Gaussian のmean
σ^2 : Gaussian のvariance



Least squares は確率分布がgauss 分布のときに有効な手法である。

復習



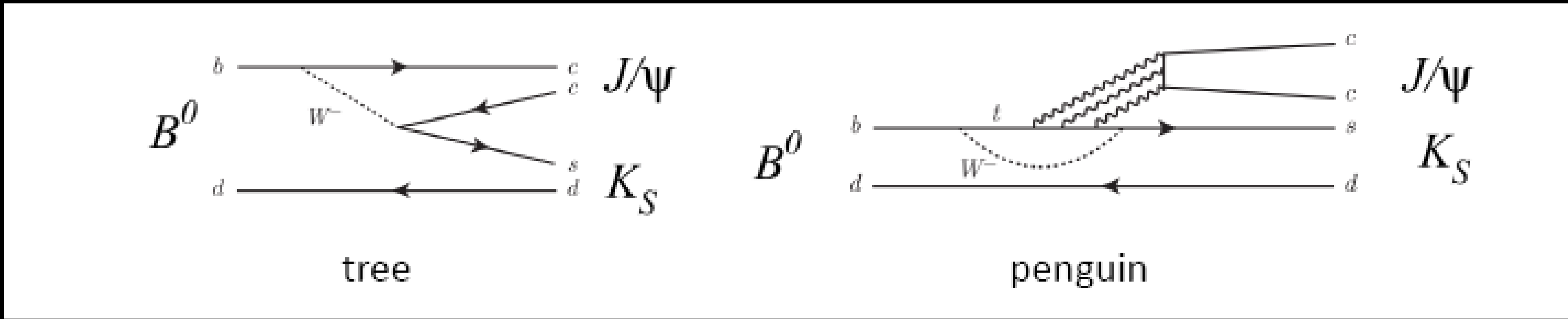


$$
\begin{aligned}
R(B^0 \to f_{CP};\ \Delta t) &= e^{-|\Delta t|/\tau_{B^0}}/2\tau_{B^0} \\
&\times [1 + \xi_f \sin 2\phi_{CP} \sin(\Delta m_d \Delta t)] \\
R(\overline{B}^0 \to f_{CP};\ \Delta t) &= e^{-|\Delta t|/\tau_{B^0}}/2\tau_{B^0} \\
&\times [1 - \xi_f \sin 2\phi_{CP} \sin(\Delta m_d \Delta t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\Delta t) &\equiv \frac{R(\overline{B}^0 \to f_{CP};\ \Delta t) - R(B^0 \to f_{CP};\ \Delta t)}{R(\overline{B}^0 \to f_{CP};\ \Delta t) + R(B^0 \to f_{CP};\ \Delta t)} \\
&= -\xi_f \boxed{\sin 2\phi_{CP}} \sin(\Delta m_d \Delta t),
\end{aligned}
$$

B→J/ψ Ks

ペンギンダイアグラムの寄与はsin2φ1
の測定では無視できる。



したがって

$$
a_{CP}(t) \equiv \frac{\Gamma_{\overline{B}\to f_{CP}}(t) - \Gamma_{B\to f_{CP}}(t)}{\Gamma_{\overline{B}\to f_{CP}}(t) + \Gamma_{B\to f_{CP}}(t)}
$$

$$
= \eta_{CP} \underline{\sin 2\varphi_1} \sin \delta m t
$$

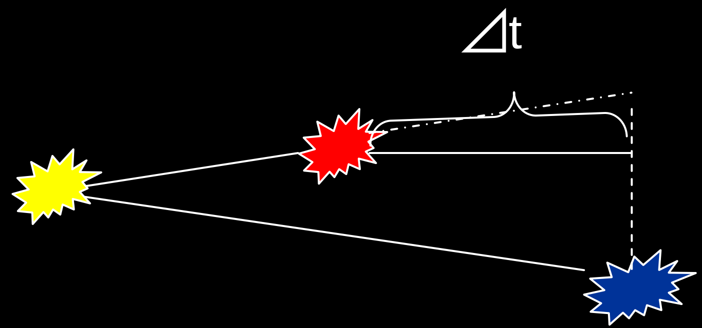
今回の論文でのmaximum likelihood

シグナルに対する確率分布関数は

$$\mathcal{P}_{\rm sig}(\Delta t, q, w_l, \xi_f) = \frac{e^{-|\Delta t|/\tau_{B^0}}}{2\tau_{B^0}} \mathcal{P}_{CP}(\Delta t, q, w_l, \xi_f)$$

$$\mathcal{P}_{CP}(\Delta t, q, w_l, \xi_f) = 1 - \xi_f q (1 - 2w_l) \sin 2\phi_1 \sin(\Delta m_d \Delta t).$$

Δt :



q : B0のflavor

w_l : wrong tag flaction

tagの間違いの割合

ξ_f : CPの固有値

Δm_d : mass の固有値の差

今回の論文でのmaximum likelihood

イベントに対する分布関数を考えると
シグナル以外にも、

1.vertex resolution ：R_sig
2.back ground likelihood function：P_bkg
3.イベントが実際にシグナルであるか：f_sig

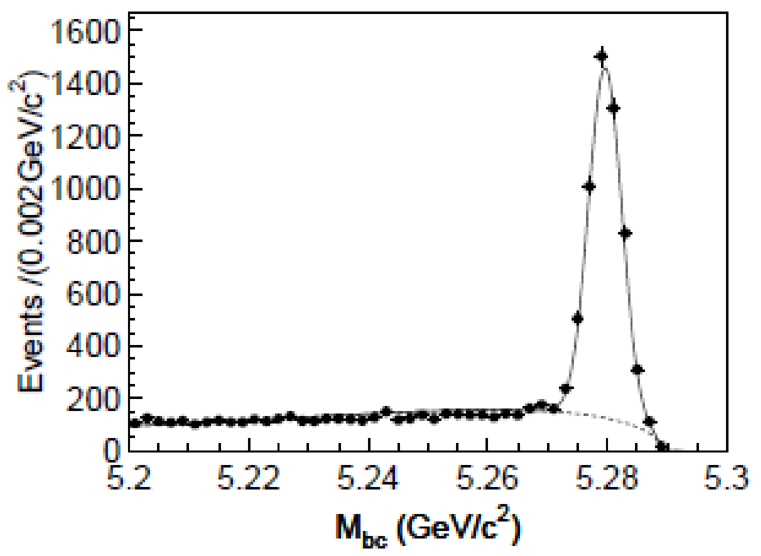
が必要。したがって

$$
\begin{aligned}
&P(\Delta t_i; \sin 2\phi_1) \\
&\qquad = f_{\rm sig} \int \mathcal{P}_{\rm sig}(\Delta t', q, w_l, \xi_f) R_{\rm sig}(\Delta t_i - \Delta t') d\Delta t' \\
&\qquad +(1 - f_{\rm sig}) P_{\rm bkg}(\Delta t_i),
\end{aligned}
$$

Signal probability

$$
\begin{aligned}
P(\Delta t_i; \sin 2\phi_1) \\
&= f_{\rm sig} \int \mathcal{P}_{\rm sig}(\Delta t', q, w_l, \xi_f) R_{\rm sig}(\Delta t_i - \Delta t') d\Delta t' \\
&+ (1 - f_{\rm sig}) P_{\rm bkg}(\Delta t_i),
\end{aligned}
$$

$$
f_{\rm sig}(\Delta E, M_{\rm bc}) = \frac{F_{\rm SIG}(\Delta E, M_{\rm bc})}{F_{\rm BG}(\Delta E, M_{\rm bc}) + F_{\rm SIG}(\Delta E, M_{\rm bc})},
$$



今回の論文でのmaximum likelihood

$$
\begin{aligned}
&P(\Delta t_i; \sin 2\phi_1) \\
&\qquad = f_{\rm sig} \int \mathcal{P}_{\rm sig}(\Delta t', q, w_l, \xi_f) R_{\rm sig}(\Delta t_i - \Delta t') d\Delta t' \\
&\qquad +(1 - f_{\rm sig}) P_{\rm bkg}(\Delta t_i),
\end{aligned}
$$

式中で自由なパラメータは唯一sin2φ_1 のみであることから

Likelihood function は

$$
L = \prod_i P(\Delta t_i; \sin 2\phi_1),
$$

Lが最大となるsin2φ_1を求める

Back up

Vertex resolution

$$P(\Delta t_i; \sin 2\phi_1)$$
$$= f_{\rm sig} \int \mathcal{P}_{\rm sig}(\Delta t', q, w_l, \xi_f) R_{\rm sig}(\Delta t_i - \Delta t') d\Delta t'$$
$$+ (1 - f_{\rm sig}) P_{\rm bkg}(\Delta t_i),$$

$$R_{\rm sig}(\Delta t - \Delta t') = (1 - f_{\rm tail}) G(\Delta t - \Delta t'; \mu_{\Delta t}, \sigma_{\Delta t}) + f_{\rm tail} G(\Delta t - \Delta t'; \mu^{\rm tail}_{\Delta t}, \sigma^{\rm tail}_{\Delta t}), \qquad (14)$$

Background likelihood

$$P(\Delta t_i; \sin 2\phi_1) = f_{\mathrm{sig}} \int \mathcal{P}_{\mathrm{sig}}(\Delta t', q, w_l, \xi_f) R_{\mathrm{sig}}(\Delta t_i - \Delta t') d\Delta t' + (1 - f_{\mathrm{sig}}) P_{\mathrm{bkg}}(\Delta t_i),$$

$$P_{\mathrm{bkg}}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{bkg}}(\Delta t') \cdot R_{\mathrm{bkg}}(\Delta t - \Delta t') d\Delta t'.$$

$$\mathcal{P}_{\mathrm{bkg}}(\Delta t) = f_\tau \frac{e^{-|\Delta t|/\tau_{\mathrm{bkg}}}}{2\tau_{\mathrm{bkg}}} + (1 - f_\tau)\delta(\Delta t'),$$