真空中と物質中のニュートリノ振動の違い

東北大学　素粒子実験(加速器)研究室
修士１年　矢野清志朗

1.序論

ニュートリノ振動とは、ニュートリノが飛行している間に別のフレーバーへと変化していく現象である。

ν_e - $\nu_e?\ \nu_\mu?\ \nu_\tau?$

真空中と物質中ではこのニュートリノ振動の振る舞いに違いが生じるが、その具体的な差及びそれらが起こる原因について式を追いつつ述べる。真空中物質中それぞれの振動についてみてき、そののちに両者の差について比較する。

2.真空中のニュートリノ振動

まずn種類の振動について考察し、その後に特定の種類での振動について見ていく。ニュートリノのフレーバー固有状態と質量固有状態の混合は3種類の場合では

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表せる。これをn種類にし、状態ベクトル空間で書くと、

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{n} U^*_{\alpha i} |\nu_i\rangle \qquad (\alpha = \mathrm{e}, \mu, \tau \cdots) \tag{2}$$

と表すことができる。このことを用いてニュートリノが真空中で時刻 t でのν_αからν_βへの確率振幅を計算すると、

$$a_{\nu_\beta;\nu_\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n} U_{\beta i} e^{-iE_i t} U^*_{\alpha i} \tag{3}$$

である。$p \gg m_i$ において、エネルギーが $E_i = \sqrt{p^2+m_i^2} \approx p + m_i^2/2p \approx E + m_i^2/2E$ と近似できることを用いて

$$P_{\nu_\beta;\nu_\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n} |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + 2\sum_{i>j} \left|U_{\beta i}U^*_{\alpha i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right| \cos\left(2\pi \frac{L}{L^v_{ij}} - \phi_{\beta\alpha;ij}\right)$$

$$\phi_{\beta\alpha;ij} = \arg\left(U_{\beta i}U^*_{\alpha i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right) \tag{4}$$

と書ける。ここで $L^v_{ij} = 4\pi \frac{E}{\Delta m^2_{ij}}$ 、$\Delta m^2_{ij} = m_i^2 - m_j^2$ である。L^v_{ij} はニュートリノ振動確率の基本的な波長（振動長）。

ここで、$\nu_\alpha \to \nu_\beta$ の振動確率がゼロではない条件、つまりニュートリノ振動が起こる条件を定式化する。振動確率は

$$P_{\nu_\beta;\nu_\alpha}(t) = \sum_{i,j} U_{\beta i}U^*_{\alpha i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t}$$

$$= \delta_{\beta\alpha} + 2\sum_{i>j} \left|U_{\beta i}U^*_{\alpha i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right| \left[\cos\left(\frac{m_i^2 - m_j^2}{2E}L - \phi_{\beta\alpha;ij}\right) - \cos\phi_{\beta\alpha;ij}\right] \tag{5}$$

とも書き直せる。すべてのニュートリノの質量が等しいとすると、

$$P_{\nu_\beta;\nu_\alpha}(t) = \delta_{\beta\alpha} \tag{6}$$

さらに混合が無い場合（$U_{\alpha i} = \delta_{\alpha i}$）を仮定すれば $a_{\nu_\beta;\nu_\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n} U_{\beta i} e^{-iE_i t} U^*_{\alpha i}$ からもこれが成り立つことは明らかである。

ある型のニュートリノが真空中で別の型のニュートリノ（またはステライルニュートリノ）に遷移するのは以下の二つの場合
(i)質量が縮退していない２つ以上のニュートリノが存在する。
(ii)混合行列のいくつかの非対角要素がゼロではない。

3.真空中の２種類でのニュートリノ振動

簡単のために、最も単純な２種類でのニュートリノ振動を用いて真空中と物質中との違い見ていく。
まず真空中について、一定の質量ν_1とν_2を持つニュートリノがディラック粒子である場合、PMNS行列は2×2の実直交行列であり、

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

という一般形をしている。よって $|\nu_\alpha\rangle$ と $|\nu_\beta\rangle$ について

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle$$
$$|\nu_\beta\rangle = -\sin\theta\,|\nu_1\rangle + \cos\theta\,|\nu_2\rangle$$

であるとわかる。振動確率の一般的な形(8)および半角の公式より

振動確率

$$P_{\nu_\beta,\nu_\alpha}(L) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{L}{L^v_{ij}}\pi = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E}L$$

$$P_{\nu_\alpha,\nu_\alpha}(L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{L}{L^v_{ij}}\pi = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E}L$$

となる。ここでΔm^2の単位をeV^2で、Lの単位をmで、pの単位をMeVで表せば、

振動長

$$L^v_{ij} = 4\pi \frac{E}{\Delta m^2_{ij}} = 2.48\mathrm{m}\left(\frac{E}{1\mathrm{MeV}}\right)\left(\frac{\Delta m^2}{1\mathrm{eV}^2}\right)^{-1}$$

となる。

4.物質中の２種類でのニュートリノ振動

ニュートリノの振動確率はニュートリノが通過する物質により大きく影響を受けることが知られている。これを物質効果もしくは提唱者Mikheyev-Smirnov-Wolfensteinの頭文字をとってMSW効果と呼ぶ。
具体的に見ていくために、t=0のときニュートリノがν_eで、そのν_eがν_μへと振動していくと仮定する。

混合行列

$$U_m = \begin{pmatrix} \cos\theta_m & \sin\theta_m \\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}$$

$$|\nu_e\rangle = |\psi^m_1\rangle \cos\theta_m + |\psi^m_2\rangle \sin\theta_m$$
$$|\nu_\mu\rangle = -|\psi^m_1\rangle \sin\theta_m + |\psi^m_2\rangle \cos\theta_m$$

振動確率

$$P^m_{\nu_\mu,\nu_e}(L) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{L}{L_m}\pi$$

$$P^m_{\nu_e,\nu_e}(L) = 1 - \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{L}{L_m}\pi$$

ここで、$\left|\psi^m_{1,2}\right\rangle$は物質内でのニュートリノのエネルギー及び運動量の固有状態で $(H_0 + H^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{int}})\left|\psi^m_{1,2}\right\rangle = E^m_{1,2}\left|\psi^m_{1,2}\right\rangle$ であり

$$L_m = \frac{L^v}{\left[1 - 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\left[1 - 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \cos 2\theta_m = \frac{\cos 2\theta - \kappa\frac{L^v}{L_0}}{\left[1 - 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

物質内の振動長　　物質内の混合角

$$\frac{2\pi}{L_0} \approx \sqrt{2}G_F N_e$$

である。反ニュートリノの場合

$$L_m = \frac{L^v}{\left[1 + 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\left[1 + 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

となるため物質中の振動確率の特徴として、**真空中の振動確率と対照的にCP対称を結構破る**ことになる。真空中と物質中のニュートリノの振動確率の特性のこのような違いは、通常の物質は反電子や反核子が無いためCPT対称でもCP対称ではないという事実から来ている。
　さらに、物質中のニュートリノ振動が起こるのは

$$P^m_{\nu_\mu,\nu_e}(L) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{L}{L_m}\pi \qquad L_m = \frac{L^v}{\left[1 - 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\left[1 - 2\kappa\frac{L^v}{L_0}\cos 2\theta + \left(\frac{L^v}{L_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$P^m_{\nu_e,\nu_e}(L) = 1 - \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{L}{L_m}\pi$$

より、真空中でニュートリノ振動が起こる場合だけ、すなわち$\theta \neq 0$と$m_1 \neq m_2$の場合だけ可能であることがわかる。
しかし、 $\sin\theta_m$ の L^v/L_0 依存性の最も顕著な特徴は、共鳴の性質である。

$$\kappa \cos 2\theta > 0$$
$$\kappa = \mathrm{sgn}(m_2^2 - m_1^2)$$

の場合、任意の $\sin 2\theta$ の値に対して、物質中のニュートリノ混合が最大つまり

$\left|\sin 2\theta^{\mathrm{res}}_m\right| = 1$ となる L^v/L_0 の値

$\left(\frac{L^v}{L_0}\right)_{\mathrm{res}} = \kappa\cos 2\theta$ が存在する。

真空中では混合角が小さく抑制されていたとしても、物質中では同じ遷移が強く増強されている可能性があることを示している。
全ての種類のニュートリノに物質から同じだけの寄与があったとすると振動は真空中と変わらない。なにが物質効果を起こしているかというと物質中の電子の存在である。