超低エネルギーサイクロトロンにおける空間電荷効果の影響の シミュレーション

素粒子実験 (加速器) 研究室 安士勇輝

2025年5月31日

目次

1	目的	3
2	原理	3
2.1	ルミノシティー	3
2.2	サイクロトロンの原理	3
2.2	.1 弱集束サイクロトロン	4
2.2	.2 AVF サイクロトロン	7
3	シミュレーション	8
3.1	AVF サイクロトロン	8
3.2	弱集束サイクロトロン	11
3.2	.1 磁場分布の作製	11
3.2	.2 シミュレーションの実行	12
4	結論	14

4 結論

1 目的

荷電粒子を加速する装置の一つにサイクロトロンがある。一様磁場中を周回する荷電粒子の周期がその軌道 半径によらないという性質を利用し、高周波電場の振動数を同期することで加速を行うものである。本研究で はサイクロトロン内で粒子同士の反応を起こすことを考え、その加速粒子の一つを陽子として議論する。陽子 をサイクロトロンで加速したときの空間電荷効果によるビームの広がりをシミュレーションを用いて確認し、 陽子を 350 keV まで加速でき、かつルミノシティーを大きくできる磁場を考える。ここではルミノシティー の目標値を 10⁴³ [m⁻²s⁻¹] のオーダーとする。また、シミュレーションは OPAL [1] を用いて行った。

2 原理

2.1 ルミノシティー

サイクロトロン内で図のように荷電粒子を反応させることを考える。この反応の単位時間当たりの反応数は



図1 サイクロトロン内で粒子を反応させる模式図

ルミノシティーLに比例し、Lは

$$L = \frac{N_a N_b f n}{S} \tag{1}$$

と書ける。ここで *N_a、N_b* はそれぞれサイクロトロンで加速する粒子の1バンチあたりの個数で、f は単位時 間あたりにサイクロトロンに投入するバンチ数、*n* は反応頻度、*S* はビームの断面積である。サイクロトロン では、タイミングよくそれぞれのバンチが衝突すると仮定すると粒子の周回数の2倍を反応頻度*n*と考える ことができる。よってサイクロトロン内での反応を多くするためには1バンチあたりの粒子数、単位時間当た りの投入バンチ数、サイクロトロン内での周回数を大きくし、ビームの断面積を小さくする必要がある。

2.2 サイクロトロンの原理

ー様な磁場強度の中で、一定周波数の高周波電場で荷電粒子を加速する装置をサイクロトロンと呼ぶ。一様 磁場 *B* 中を速度 *v* で運動する電荷 *q* の荷電粒子の運動方程式は

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \tag{2}$$

と書ける。ここで、mは荷電粒子の質量、rは軌道半径である。式 (2) をvについて解くと、

$$v = \frac{rqB}{m} \tag{3}$$

よって回転周期は

$$\Gamma_{rev} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{4}$$

と求まる。式 (4) より、回転周期 *T_{rev}* は粒子の質量 *m* と電荷 *q*、磁場 *B* にのみ依り、半径 *r* に依らないこと がわかる。つまり、粒子のエネルギーに関係なく周期は一定となることを意味する。

2.2.1 弱集束サイクロトロン

図2にサイクロトロンの模式図[2]を示す。磁場は紙面に垂直にかかっている。Deeと呼ばれる2つの電極



図2 サイクロトロンの模式図[2]

に高周波電圧を印加することで、電極間に高周波の電場を発生させることができる。この周波数を粒子の回転 周波数に同期させることで、回転している粒子が gap を通過するたびに加速されるという仕組みである。弱集 束サイクロトロンではビームの広がりを抑制するために集束力が得られるような磁場構造になっている。ここ で磁場による集束の強さを考えるため磁場指標 *n* を導入する [3]。

$$n = -\frac{\rho}{B}\frac{dB}{d\rho} \tag{5}$$

弱集束サイクロトロンではサイクロトロンの中心から半径方向に向かって徐々に弱くなる磁場となっている。 つまり磁場指標 n は

$$0 < n < \infty \tag{6}$$

となる。この磁場の様子を、サイクロトロンの中心を通る鉛直面で切って図示したものが図3である [3]。図 3には紙面の手前から奥に向かう速度を持つ陽子がこの面を通過するときに陽子に働く力を図示してある。図 より、サイクロトロンの中心面から外れた荷電粒子には中心面に向かう方向に力が働くことがわかる。これが 弱集束サイクロトロンの鉛直方向の集束力である。次に水平方向の集束力を考える。図4はサイクロトロン内 を速度 v で運動する電荷 qe の荷電粒子が回転軌道 ρ にあるときに働く遠心力とローレンツ力の大きさ、それ ぞれ F_C 、 F_L を図示したものである。また、 ρ_s は $F_C = F_L$ となる安定軌道である。水平方向に集束力を持 たせるには $\rho < \rho_s$ のとき、 $F_L < F_C$ 、 $\rho_s < \rho$ のとき、 $F_L > F_C$ となる必要がある。つまり安定軌道 ρ_s か らのずれが十分小さいとき、 $\rho = \rho_s$ において $\frac{dF_C}{d\rho} < \frac{dF_L}{d\rho}$ が成り立てばよい。まず、ローレンツ力において、 $F_L = qevB(\rho)$ かつ式 (5) より、

$$\frac{dF_L}{d\rho} = qev\frac{dB}{d\rho} = -qev\frac{B}{\rho}n$$



図3 弱集束サイクロトロンの磁場

これに $ho =
ho_s$ を代入し、さらにつり合いの式 $\frac{mv^2}{
ho_s} = qevB\left(
ho_s
ight)$ より、

$$\left. \frac{dF_L}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_s} = -qev \frac{B\left(\rho_s\right)}{\rho_s} n = -\frac{mv^2}{\rho_s^2} n \tag{7}$$

次に、遠心力について、 $F_C = \frac{mv^2}{
ho}$ より、

$$\left. \frac{dF_C}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_s} = -\frac{mv^2}{\rho_s^2} \tag{8}$$

よって、式(7)、式(8)より、弱集束サイクロトロンで水平方向の集束が得られるような磁場指標 n は、

$$\frac{dF_C}{d\rho} < \frac{dF_L}{d\rho}
-\frac{mv^2}{\rho_s^2} < -\frac{mv^2}{\rho_s^2}n
n < 1$$
(9)

よって、式(6)、式(9)より、鉛直方向と水平方向どちらの集束条件も満たすには磁場指標は

である必要がある。次に弱集束サイクロトロンの、半径の増加に従って小さくなる磁場分布が RF の振動数と 荷電粒子の回転周波数にどのような影響があるのか考える。弱集束サイクロトロンにおいて、半径における磁 場の強さと各半径周回時の RF の極大値からの位相のずれを示したものが図 5 である [5]。また、図 6 は荷電 粒子が加速されるたびに RF の位相のどの部分で加速されるのかを示した図である [6]。加速点は時間発展に 従い赤い線の矢印の向きに進む。ここで RF の振動数は図 5 の磁場 B_D に合わせてあるものとする。磁場が B_D となる半径を r_D とすると弱集束を得るため、半径 r が $r < r_D$ のとき磁場 B は $B_D < B$ となり、r が $r_D < r$ のとき B は $B < B_D$ となる。よって式 (4) より、 $r < r_D$ のとき回転周波数は RF の周波数より大き



Accelerating field injection extraction 0° 180° phase Isochron Beam

図 5 半径における磁場の強さと半径周回時の RF からの位相のずれ

図6 弱集束サイクロトロンでの加速位相の進み方

くなり図 6 での injection から矢印の向きに進む。 $r = r_D$ のとき回転周波数と RF の周波数は一致し (図 6 の Isochron Beam に対応)、 $r_D < r$ のとき回転周波数は RF の周波数より小さくなり、図 6 で見ると今までと逆 向きに進む。つまり、弱集束サイクロトロンでは加速位相を途中で折り返しながら粒子を加速していることに なる [5]。このことから、弱集束サイクロトロンで粒子を加速するときには RF の電圧に注意する必要がある。 なぜなら、RF での加速電圧が負となる前に $r_D < r$ とならなければならないからである。つまり加速の途中 で RF の電圧が負とならない場合の最小の電圧が存在し、RF の振幅がその電圧を下回ってしまうと $r_D < r$ となる前に加速粒子の位相が RF の減速の領域に入ってしまい加速できないということである。

ここまで弱集束サイクロトロンについて説明してきたが、相対論的効果を考えると、式 (4) で粒子のエネル ギーが大きくなるにつれ質量が増加し荷電粒子の回転周期が一定にならないことがわかる。つまり式 (4) は

$$T_{rel} = \frac{2\pi m\gamma}{qB} \tag{10}$$

と書き換えることができる。この相対論による効果を打ち消すためには磁場 *B* を半径の増加にしたがって大 きくする必要があるがこれは磁場による集束を得るための条件、つまり磁場は半径の増加に従い小さくする必 要があることに反し、ビームが垂直方向に発散することになる。このことを解決できるようなサイクロトロン が次で説明する AVF サイクロトロンである。

2.2.2 AVF サイクロトロン

AVF サイクロトロンでは磁場の強さを荷電粒子の回転周期に合わせて、弱集束による集束力を捨てる代わ りに図 7 のように方位角方向に磁場の強さを変化させて集束力を得ている [2]。図 8 は方位角方向に変化する



図7 方位角方向に磁場の強さを変える magnetic pole

磁場 (AVF) 中を回転する荷電粒子の軌道を図示したもの [2] で、図 9 は AVF サイクロトロンを運動する粒子 の軌道に沿ってサイクロトロンを横から見たもの [2] である。図 7、図 8、図 9 では、hill が磁場の強くなって



図8 AVF により回転する荷電粒子の軌道

いる場所、valley が磁場の弱くなっているところを示している。図 8 では磁場の強い hill で曲率半径が小さ く、弱い valley で曲率半径が大きくなっていることがわかる。このことにより粒子が hill から valley へ入射 するときには粒子はサイクロトロンの中心に向かう向きの速度成分を持ち、valley から hill へ入射するときに はそれと逆向きの速度成分をもつことがわかる。また、図 9 のように、hill と valley の境界付近ではそれらの 磁場の強さの差により磁場が湾曲する。以上より hill と valley の境界を荷電粒子が通過するとき中心面から ずれている粒子は中心面に向かう向きの力が働くことがわかる。また、半径の増加に従って大きくなる磁場の 磁場指標は負であるので、水平方向の集束条件である式 (9) を満たすことがわかる。このように AVF サイク ロトロンを運動する荷電粒子には集束力が働くことがわかる。

図 9 AVF による集束の様子

3 シミュレーション

3.1 AVF サイクロトロン

シミュレーションで使う AVF サイクロトロンについて、PSI で実際に運用されている前置加速器である InjectorII のサンプルプログラムが opal に用意されていたのでこれを用いた。InjectorII での陽子の加速軌道 は図 10 で、磁場分布は図 11 である。また、図 10 の座標 (0,0) から (4,0) に半直線を引きこれを基準線とし、



図 10 InjectorII での陽子の加速軌道



(0,0)を中心に半直線を回転させたものと基準線の間の角度を θ とする。なお、角度は半直線を反時計回りに 回して増加するように定義する。InjectorIIの RF は図 10の座標 (0,0)を通り、最大電圧 0.30361 MV のもの が θ = 35.0°, 55.0° の位置に、最大電圧 0.288119 MV のものが θ = 215°, 235° の位置にある。InjectorII は入 射エネルギーが 870 keV、取り出しが 72 MeV のサイクロトロンであるためこれを目標のエネルギーである 350 keV まで小さくすることを考える。サイクロトロンにおいて粒子のエネルギーが小さくなると軌道半径が 小さくなる。相対論的効果を無視すると粒子の運動エネルギー K は粒子の速度の 2 乗に比例する $(K \propto v^2)$ 。 よって原理の章の式 (3) より、軌道半径 r は運動エネルギーの平方根に比例する ($r \propto \sqrt{K}$)。また、InjectorII では磁場を印加するのに電磁石を用いているが、本研究では永久磁石を用いるため、磁場の強さも元の1/2、 つまり最大磁場が 0.5 T 程度になるようにした。例としてサンギョウサプライ [4] が取り扱っている丸形ネオ ジム磁石の表面磁束密度は 0.04 ~ 0.58 T 程度であるので、この磁場の大きさは妥当であるとする。式 (3) と 式 (4) より、軌道半径と周期はそれぞれ $r \propto 1/B$ 、 $T_{rev} \propto 1/B$ と磁場 Bによる。よってこのことも考慮し、 InjectorII のサンプルプログラムをスケールさせる。まとめると、InjectorII の最終エネルギーを 350 keV にし てその分、入射エネルギー、入射半径、磁場分布の半径、RFの振幅をスケールする。さらに、磁場の強さを 🗄 にした分、入射半径、磁場分布の半径、RFの振動数をスケールする。スケール後のものを InjectorII-small と 呼ぶことにする。まずは陽子1個を加速し、350 keV に到達できるかを確認した。そのときの InjectorII-small のシミュレーションによる粒子の加速軌道は図 12 で粒子のターン毎のエネルギープロットが図 13、ターン毎 のエネルギーゲインは図 14 である。入射時のエネルギーは 4.23 keV で加速中の最大エネルギーは 21.8 keV、 RF 周波数は 2.53185 MHz であった。図 14 より、粒子が周回を重ねるごとにゲインが小さくなり、8、9 周





図 12 取り出し 350 keV になるようにスケールしたときの加速軌道

図 13 取り出し 350 keV になるようにスケールしたときの粒子のエネルギー変化



図 14 取り出し 350 keV になるようにスケールしたときの粒子のターン毎の energy gain

目あたりで符号が反転していることがわかる。つまり 350 keV まで加速できなかった原因として粒子の回転 周波数と RF の振動数があっていないことが考えられる。ゲインのずれからそれら周波数のズレを見積もりそ の範囲で図 12 での RF 周波数から徐々にずらしていき、加速できたエネルギーをプロットしたものが図 15、 図 16 である。図 15、図 16 より、RF 周波数を徐々に変えていった場合でも 55 keV 程度までしか加速できな かった。

次に、この周波数のズレは Injector II-small と元の Injector II で考えるべき相対論的効果による影響の違い だと考え、それについて議論する。

相対論的効果を考える

AVF サイクロトロンにおいて、ビームの集束は磁場の動径方向の勾配ではなく方位角方向の磁場の強さの 違いからもたらされるので、粒子の周回速度の違いによる周期の違い (これは粒子の相対論的質量の増加から くる)にあわせて磁場の強さを強くすることができる。InjectorII とスケール後の InjectorII-small ではエネル ギーは 0.00486 倍になっており、その分相対論的効果も小さくなる。つまり、InjectorII の磁場分布を使う場 合、ただスケールさせるのではなく、磁場分布に反映されている相対論的効果による項も小さくする必要が



図 15 RF を 2.53185±0.1 MHz の範囲で変えて いき、加速可能エネルギーをプロットしたもの



図 16 図 15 の周波数 +0.13 ~ +0.14 MHz を細か くとってシミュレーションした結果

ある。粒子の周回速度と周回半径は一対一対応しているため、周回軌道によって式 (10) での γ が決まることになる。よって磁場分布の特定の半径部分を通過する粒子の γ がわかり、式 (10) での γ を打ち消すため磁場 B は

$$B = B' \times \gamma$$

とならなければならない。ここで γ は r の関数と見ることができる。よって、スケール後の Injector II -small の磁場分布においてスケール前の Injector II の半径 r に対応する γ を γ_2 としスケール後の半径 r_{small} に対応 する γ を γ_{small} とすると、Injector II-small の相対論効果をスケール後に合わせた分布は、さらに $\frac{\gamma_{small}}{\gamma_2}$ をか ける必要がある。Injector II-small の磁場分布にこの処理を施したものを Injector II-small-rel とする。Injector I I-small-rel のシミュレーション結果は図 17 である。図 17 より粒子が周回軌道を外れてしまっていることがわ



図 17 相対論的効果を考慮し、スケールしたときの シミュレーション軌道



図 18 RF を 2.53185 ± 0.1 MHz の範囲で変えて いき、加速可能エネルギーをプロットしたもの

かる。また、相対論効果を考慮しなかった場合と同様に RF 周波数を徐々に変えていっても十分なエネルギー まで加速できなかった (図 18)。 ここで一旦、InjectorIIのスケールによる低エネルギー領域での陽子の加速を諦め、弱集束サイクロトロンによるシミュレーションに移る。

3.2 弱集束サイクロトロン

3.2.1 磁場分布の作製

弱集束サイクロトロンのシミュレーションに使う磁場分布は電磁界解析ソフトウェア FEMM(Finite Element Method Magnetics) [7] を用いて作製した。図 19 は弱集束磁場を再現するために FEMM で作製した永久磁石とヨークの配置の図である。図 19 は軸に対して円筒対称となっていて、永久磁石にヨークを取り



図 19 FEMM で作製した永久磁石とヨークの配置

図 20 加速 gap での中間面での磁束密度の大きさ プロットしたもの

付け、加速 gap での磁場を大きくしている。また、永久磁石にはネオジム磁石 (NdFeB) の N55 を、ヨークに は低炭素鋼である 1006steel を用いている。磁場の製作時に考えることは以下のことである。

- 1. サイクロトロンをコンパクトにするために磁場をできるだけ強くし陽子の周回半径を小さくしたい。
- 2. 陽子ビームを集束させるために軌道半径が大きくなるにつれて磁場が小さくなるような勾配を付けた い。(弱集束)

1. について、磁石にリターンヨークを取り付けヨーク側に磁石を取り付けることで磁場を大きくできる [8]。 図 20 は加速 gap での中間面での磁束密度の大きさを半径 0 ~ 10 cm においてプロットしたものである。ま た、磁場を強くするには磁石を大きくすればよく、そのようにすることで陽子の周回半径を小さくできるが、 大きくした磁石の分だけサイクロトロン自体が大きくなってしまう。この部分の最適化について今回は深追い はしない。2. について、図 20 より半径の増加にしたがって磁場の大きさが小さくなっている様子が見られる。 以下のシミュレーションでは磁極の面の水平からの角度を変えて徐々に磁場の勾配を強くしていき、それぞれ の磁場でシミュレーションを行った。なお用いた磁場分布で、粒子の加速領域においては弱集束の条件を磁場 指標 n が満たす (0 < n < 1) ことを確認した。

3.2.2 シミュレーションの実行

図 19 の磁場分布を使い、OPAL[1] というソフトウェアを用いて 350 keV 程度まで加速したときの陽子ビー ムの広がりを見る目的でシミュレーションをした。また、陽子ビームのルミノシティーの向上を狙っているた め、原理の章の式 (1) の反応頻度 n を稼ぐために最小電圧で加速するようにした。なお以下で言う θ は図 21 の θ のことであり、磁極の面の半径方向の傾きを表す。なお、角度は磁極の磁石側の端の位置を上下に動かす ことで付けた、つまり加速 gap の中心の高さは常に 2 cm である。また上下の磁極には共に同じ角度をつけ た。シミュレーションでは 1 バンチに入れる粒子の数を 1 桁ずつ増やしていったが、損失なく粒子を 350 keV



図 21 *θ* は磁極の半径方向の傾きを表す

まで加速できたのは 10⁸ 個までであった。空間電荷効果による影響を小さくするために、粒子はできるだけ広 げていれるべきだが、粒子の入射位置や gap の幅、RF の周波数による加速可能な領域の存在などによって制 限される。今回、粒子はガウス分布で投入していて、標準偏差は垂直方向、半径方向それぞれ σ_z = 3 mm、 $\sigma_r = 0.3 \text{ mm}$ 、進行方向では $\sigma_{ heta} = 0.3 \text{ mm}$ にすることで粒子の損失やバンチの分離などが起きることなく加 速できた。図 22、図 23 はそれぞれ粒子の周回面の垂直方向と半径方向の分布の標準偏差を平均エネルギーに 対してプロットしたものである。凡例の括弧内の数字は 350 keV まで加速したときの周回数である。なお、図 24 のように半径方向の標準偏差は大きく振動していたので、1 周ごとに平均を取ったものを図 23 に示した。 次に 350 keV まで加速したときの z 方向と半径方向の標準偏差を投入した全粒子を損失なく加速できたθに 対してプロットしたものが図 25、図 26 である。なお、図 22、図 24 より、標準偏差が振動していることがわ かったので図 25、図 26 では 1 周当たりの平均を用いた。z 方向と半径方向の粒子の分布の標準偏差は 10⁻³ m のオーダーであることがわかる。原理の式(1)より、ルミノシティーのを向上させるにはビームを細くする以 外にもバンチ内の粒子数を増やす、周回数を増やすつまり RF の振幅を小さくしてゆっくり加速するなどが考 えられる。弱集束サイクロトロンで加速できたのはバンチあたり 10⁸ 個、断面積は 10⁻⁶ m²、周回数は最大 で 32 周であり、反応相手のビームの粒子数と断面積がこれと等しいとするとルミノシティーは 10³⁰[m⁻²s⁻¹] のオーダーであった。目標のルミノシティーの 10^{43} [m⁻²s⁻¹] に対して 13 桁小さいことがわかる。AVF サイ クロトロンを使うことで集束力が強まりバンチあたりの粒子数の増加やビーム断面積の減少が期待できる。ま た、弱集束サイクロトロンと異なり周回周期にあった磁場分布 (等時性磁場) にすることができるので最小電 圧を気にする必要がなく、周回数を増加できる可能性もある。以上の理由から、これ以上のルミノシティーの



図 22 z方向の標準偏差を平均エネルギーに対して プロットしたもの



図 23 半径方向の標準偏差を平均エネルギーに対し てプロットしたもの。1 周ごとに平均を取った。



図 24 半径方向の標準偏差を平均エネルギーに対してプロットしたもの



図 25 z方向の標準偏差を θ に対してプロットしたもの 図 26 半径方向の標準偏差を θ に対してプロットしたもの

向上には AVF サイクロトロンでの粒子の加速が必要だと考えられる。

4 結論

陽子をサイクロトロンで加速したときの空間電荷効果によるビームの広がりをシミュレーションを用いて確認し、陽子を 350 keV まで加速でき、かつルミノシティーを大きくできる磁場を考えた。OPAL にあるサンプルプログラムの AVF サイクロトロンでは 350 keV まで加速できなかった。次に弱集束の条件を満たす磁場を FEMM で製作し弱集束サイクロトロンでの加速のシミュレーションを行った。バンチあたり 10⁸ 個の陽子を 350 keV まで加速でき、条件の等しいビームと反応させたと仮定したときのルミノシティーは 10³⁰[m⁻²s⁻¹] のオーダーになると見積もられた。350 keV まで加速できる AVF を作り、加速を実行することで加速粒子数 やビームの断面積の向上、また、等時性磁場による最小電圧の撤廃によりルミノシティーが向上できる可能性 があると考える。

参考文献

- [1] OPAL (Object Oriented Particle Accelerator Library) https://gitlab.psi.ch/OPAL
- [2] 連載 (2) 医療用粒子加速器の基礎-サイクロトロンー https://www.jstage.jst.go.jp/article/ jjmp/33/3/33_145/_pdf/-char/ja
- [3] 連載(1) 医療用粒子加速器の基礎ーサイクロトロンー https://www.jstage.jst.go.jp/article/ jjmp/33/1/33_2/_pdf/-char/ja
- [4] サンギョウサプライ ネオジム磁石 丸型 https://www.e-sangyo.jp/neo/r/neomaru.html
- [5] 後藤 彰.Beam Dynamics in Cyclotrons. 理化学研究所,1998 https://beam-physics.kek.jp/ ryoiki/kenkyukai/procs/Goto-BeamDynamicsCyclo.pdf
- [6] W. Kleeven and S. Zaremba Cyclotrons: Magnetic Design and Beam Dynamics, 2018 https:// arxiv.org/abs/1804.08961
- [7] FEMM(Finite Element Method Magnetics) https://www.femm.info/wiki/HomePage
- [8] Hyun Wook Kim, Jong Seo Chai Design Study Of Cyclotron Magnet With Permanent Magnet, 2011 https://pubs.aip.org/aip/acp/article/1336/1/75/655591/ Design-Study-Of-Cyclotron-Magnet-With-Permanent